

Quadratische Gleichungen (Lösungssatz; „pq-Formel“)

Die quadratische Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ wird zunächst durch a dividiert:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ kann dann die „pq-Formel“ angewendet werden.

Beispiele:

1. $x^2 + 10x + 9 = 0$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 9} & \text{oder} & \quad x = -\frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 9} \\ x &= -5 + \sqrt{16} & \text{oder} & \quad x = -5 - \sqrt{16} \\ x &= -5 + 4 & \text{oder} & \quad x = -5 - 4 \\ x &= -1 & \text{oder} & \quad x = -9 \end{aligned}$$

2. $x^2 - 6x - 40 = 0$

$$\begin{aligned} x &= -\left(-\frac{6}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-40)} & \text{oder} & \quad x = -\left(-\frac{6}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-40)} \\ x &= 3 + \sqrt{9 + 40} & \text{oder} & \quad x = 3 - \sqrt{9 + 40} \\ x &= 10 & \text{oder} & \quad x = -4 \end{aligned}$$

3. $2x^2 + 16x + 24 = 0$ (Division durch 2 auf beiden Seiten der Gleichung)

$x^2 + 8x + 12 = 0$ Jetzt kann die „p-q-Formel“ angewendet werden.

4. Auch die Sonderformen der gemischt-quadratischen Gleichung können mit der „p-q-Formel“ gelöst werden, z.B. $x^2 + 8x = 0$; (Es gilt $q = 0$) .

Hier kann, nachdem x ausgeklammert wurde, auch die „Produkt-Null-Regel“ angewendet werden.

Anmerkung: Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ können mit Hilfe des Taschenrechners gelöst werden, indem **MODE/EQN** bzw. **MENU/A** gewählt wird und dann die Koeffizienten a , b und c eingegeben werden.

Achtung: Der Taschenrechner gibt auch sogenannte „imaginäre“ Lösungen an (erkennt man an dem „i“). Uns interessieren allerdings nur die reellen Lösungen.

Lösbarkeit von quadratischen Gleichungen

1. Quadratische Gleichungen mit zwei Lösungen

Löse die Gleichung: $x^2 - 2x - 3 = 0$

Die *rechnerische Lösung* ergibt:

$$x = 3 \quad \text{oder} \quad x = -1$$

Graphische Fragestellung:

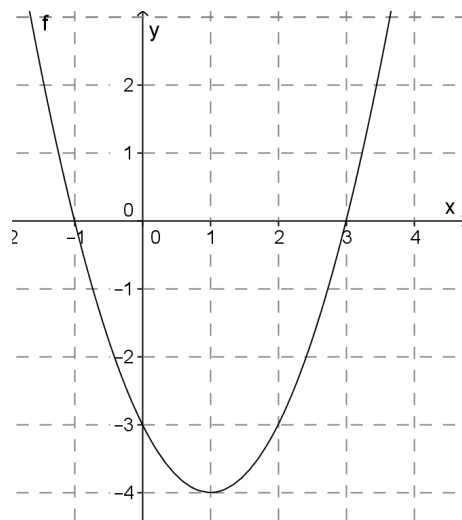
Bestimme die Nullstellen

der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Die *graphische Lösung* ergibt:

Der Funktionsgraph hat zwei

Nullstellen.



2. Quadratische Gleichungen mit einer Lösung

Löse die Gleichung: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Die *rechnerische Lösung* ergibt:

$$x = 2$$

Graphische Fragestellung

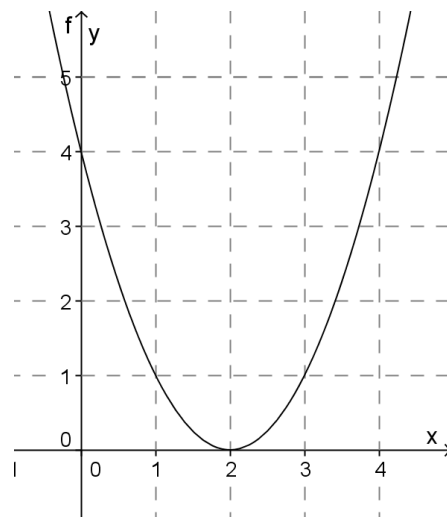
Bestimme die Nullstellen

der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Die *graphische Lösung* ergibt:

Der Funktionsgraph hat genau eine

Nullstelle.



3. Quadratische Gleichungen, die keine Lösung haben

Löse die Gleichung: $x^2 + 4x + 5 = 0$

Die rechnerische Lösung ergibt:

Die Gleichung ist unerfüllbar.

Graphische Fragestellung

Bestimme die Nullstellen

der Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

Die *graphische* Lösung ergibt:

Der Funktionsgraph hat keine Nullstelle.

